Terminale **Notre Dame de La Merci – Montpellier**

Interrogation sur le raisonnement par récurrence

Exercice 1 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -2u_n + 9$

Démontrer que, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = (-2)^{n+1} + 3$

Exercice 2 : Prouver par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est divisible par 3.

Exercice 3 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{4 + {u_n}^2}$

a) Calculer les 4 premiers termes de la suite :
b) Conjecturer une expression pour le terme général u_n
c) Prouver cette conjecture par récurrence :

Terminale **Notre Dame de La Merci – Montpellier**

Interrogation sur le raisonnement par récurrence – CORRIGE

Exercice 1 : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -2u_n + 9$

Démontrer que, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = (-2)^{n+1} + 3$

Initialisation : $u_0 = (-2)^{0+1} + 3 = (-2)^1 + 3 = 1$ donc la propriété est initialisée

Hérédité : on suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-2)^{n+1} + 3$

→ceci implique-t-il que $u_{n+1} = (-2)^{n+2} + 3$?

$$u_{n+1} = -2u_n + 9 = -2\left((-2)^{n+1} + 3\right) + 9 = -2 \times (-2)^{n+1} - 6 + 9 = (-2)^{n+2} + 3$$

La propriété est initialisée et héréditaire : par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-2)^{n+1} + 3$

Exercice 2 : Prouver par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N},\ n^3 - n$ est divisible par 3.

Initialisation : $0^3 - 0 = 0$ est bien divisible par 3

Hérédité : supposons que $\forall n \in \mathbb{N},\ n^3 - n$ est divisible par 9.

→cela implique-t-il $(n+1)^3 - (n+1)$ est divisible par 9 ?

$$(n+1)^3 - (n+1) = (n+1)\left(n^2 + 2n + 1\right) - (n+1) = n^3 + 2n^2 + n + n^2 + 2n + 1 - n - 1 = n^3 + 3n^2 + 2n$$

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 - n + n + 3n^2 + 2n = \left(n^3 - n\right) + 3\left(n^2 + n\right)$$

→par hypothèse, la 1ère parenthèse et multiple de 3, de même pour le 2ème terme.

Par récurrence, on peut affirmer que $\forall n \in \mathbb{N},\ n^3 - n$ est divisible par 3.

Exercice 3 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n{}^2}$

a) Calculer les premiers termes de la suite :

$u_1 = \sqrt{4 + u_0{}^2} = \sqrt{4 + 0^2} = 2$; $u_2 = \sqrt{4 + u_1{}^2} = \sqrt{4 + 2^2} = \sqrt{8}$;

$u_3 = \sqrt{4 + u_2{}^2} = \sqrt{4 + \left(\sqrt{8}\right)^2} = \sqrt{4 + 8} = \sqrt{12}$; $u_4 = \sqrt{4 + u_3{}^2} = \sqrt{4 + \left(\sqrt{12}\right)^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$

b) Il semble que $u_n = \sqrt{4n} = 2\sqrt{n}$

c) Prouver cette conjecture par récurrence :

L'initialisation est déjà vérifiée

Hérédité : supposons cette hypothèse vraie au rang n : $u_n = \sqrt{4n} = 2\sqrt{n}$

→cela implique-t-il $u_{n+1} = 2\sqrt{n+1}$?

$u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n{}^2} = \sqrt{4 + \left(\sqrt{4n}\right)^2} = \sqrt{4 + 4n} = \sqrt{4(1+n)} = 2\sqrt{n+1}$: l'hérédité est vérifiée

Par récurrence, on peut affirmer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{4 + u_n{}^2}$